

# **Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki**

Wydział Mechaniczny Technologiczny  
Politechnika Śląska w Gliwicach

## **Metody komputerowe analizy wrażliwości układów drgających**

Promotor:

**dr hab. inż. Piotr Fedeliński,  
Profesor Politechniki Śląskiej**

Wykonał: **Jacek Ptaszny**

Grupa: **MB4**

Kierunek: **Mechanika i Budowa Maszyn**

Specjalność: **Mechanika Komputerowa**

# Cel pracy

- ✦ Zapoznanie się z analizą dynamiczną MES i MEB
- ✦ Opracowanie programu analizy dynamicznej kratownic modelowanych MES
- ✦ Zapoznanie się z metodami analizy wrażliwości układów drgających
- ✦ Opracowanie programów realizujących analizę wrażliwości:
  - częstości, postaci własnych i przemieszczeń kratownic obciążonych dynamicznie, przy wykorzystaniu samodzielnie opracowanego programu (MES)
  - przemieszczeń tarcz obciążonych dynamicznie, za pomocą programu wykorzystującego podwójną zasadę wzajemności (MEB)
- ✦ Przeprowadzenie obliczeń opracowanymi programami

# Równanie ruchu MES

Równanie ruchu elementu skończonego

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}\mathbf{q} = \mathbf{r}^z$$

Macierze bezwładności, tłumienia, sztywności i sił zewnętrznych

$$\mathbf{m} = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV_e, \quad \mathbf{c} = \int_{V_e} \kappa \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV_e, \quad \mathbf{k} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV_e, \quad \mathbf{r}^z = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV_e + \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS_e + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i$$

Wielkości wewnątrz elementu

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}}, \quad \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{q}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q}$$

Równanie ruchu całego układu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K}\mathbf{Q} = \mathbf{R}^z$$

Całkowanie równania ruchu metodą: *Newmarka*, *Wilsona*, *Houbolta*, itd.

# Częstości i postaci drgań

Częstości i postaci drgań własnych

$$(\mathbf{K} - \mu\mathbf{M})\mathbf{u} = 0, \quad \mu = \omega^2$$

Częstości i postaci drgań układów z tłumieniem

$$(\mu^2\mathbf{M} + \mu\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{u} = 0, \quad \mu = -\delta + i\omega$$

Wyznaczanie wartości własnych:

- ✱ Metody iteracyjne
- ✱ Metoda Jacobiego
- ✱ Metoda Givensa
- ✱ Metody QR
- ✱ ...

# Równanie ruchu MEB

## Podwójna zasada wzajemności

Równanie ruchu ośrodka sprężystego w postaci równania całkowego

$$c_{ki}u_i - \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma + \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma = \rho \left( c_{ki} \psi_{li}^j - \int_{\Gamma} u_{ki}^* \eta_{li}^j d\Gamma + \int_{\Gamma} p_{ki}^* \psi_{li}^j d\Gamma \right) \ddot{\alpha}_i^j$$

Równanie macierzowe

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{p} - \rho(\mathbf{H}\boldsymbol{\psi} - \mathbf{G}\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} = 0$$

Wyrażenie nieznanych funkcji  $\boldsymbol{\alpha}$  przemieszczeniami węzłowymi  $\mathbf{u}$ , wprowadzenie macierzy bezwładności

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{E}\mathbf{u}, \quad \mathbf{M} = -\rho(\mathbf{H}\boldsymbol{\psi} - \mathbf{G}\boldsymbol{\eta})\mathbf{E}$$

Równanie ruchu MEB

$$\mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\mathbf{p}$$

Całkowanie równania ruchu metodą: *Newmarka*, *Wilsona*, *Houbolta*, itd.



# Analiza wrażliwości

Analiza wrażliwości w mechanice konstrukcji:

- Badanie wpływu pewnych parametrów konstrukcji na zmianę pól przemieszczeń, odkształceń i naprężeń, ich lokalnych wartości ekstremalnych lub funkcjonałów skalarnych
- Analiza wpływu uszkodzenia konstrukcji na zmianę jej zachowania oraz identyfikacja tego uszkodzenia na podstawie pomiarów pól odkształceń lub naprężeń w zadanych punktach

Zastosowanie:

- **Optymalizacja konstrukcji** – poszukiwanie ekstremum funkcji celu przy spełnieniu ograniczeń
- **Identyfikacja** – określenie parametrów materiałowych lub geometrycznych układu na podstawie pomiarów przemieszczeń lub odkształceń (zagadnienie odwrotne)

# Analiza wrażliwości częstości i postaci drgań

Pochodna wartości własnej

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mathbf{u}^T \left( \frac{d\mathbf{K}}{dx} - \mu \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}}$$

Pochodna wartości własnej i wektora własnego

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \mu \mathbf{M} & -\mathbf{M} \mathbf{u} \\ -\mathbf{u}^T \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\mathbf{u}}{dx} \\ \frac{d\mu}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \left( \frac{d\mathbf{K}}{dx} - \mu \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \mathbf{u} \\ \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{M}}{dx} \mathbf{u} \end{Bmatrix}$$

Pochodna wartości własnej dla układu

☀ z dowolnym tłumieniem

$$\frac{d\mu}{dx} = - \frac{\mu^2 \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{M}}{dx} \mathbf{u} + \mu \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{C}}{dx} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx} \mathbf{u}}{2\mu \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u}}$$

☀ z małym tłumieniem

$$\frac{d\mu}{dx} = - \frac{\boldsymbol{\varphi}^T \frac{d\mathbf{C}}{dx} \boldsymbol{\varphi}}{2\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}}$$

# Analiza wrażliwości odpowiedzi dynamicznej

- Metoda bezpośrednia

$$\mathbf{M}_R \frac{d\ddot{\mathbf{q}}}{dx} + \mathbf{C}_R \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dx} + \mathbf{K}_R \frac{d\mathbf{q}}{dx} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{f}_R}{dx} - \frac{d\mathbf{M}_R}{dx} \ddot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{C}_R}{dx} \dot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{K}_R}{dx} \mathbf{q}$$

- Metoda układu sprzężonego - pochodna funkcjonału

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \int_0^{t_f} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) dt$$

Układ sprzężony,  
zagadnienie brzegowo-końcowe

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\lambda}} - \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right)^T$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t_f) = 0$$



Pochodna

$$\frac{dJ}{dx} = \int_0^{t_f} \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{r} \right) dt$$



# Przykład 1.

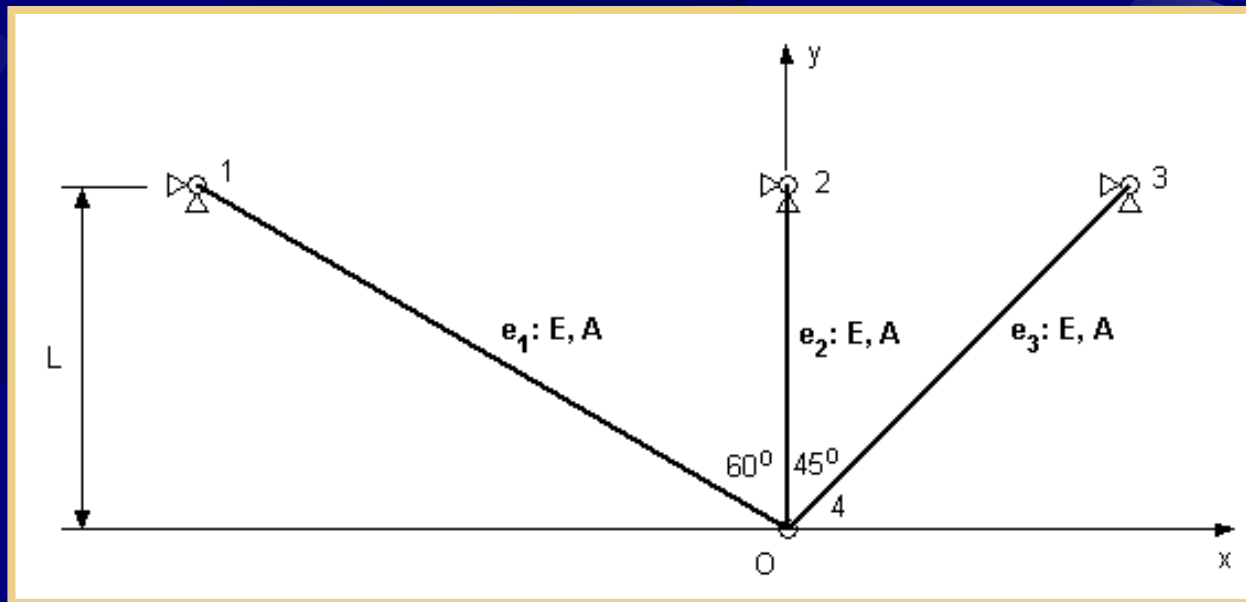
## Analiza wrażliwości częstości własnej kratownicy

Obliczono pochodne pierwszej częstości drgań kratownicy względem:

- a) pola przekroju wszystkich prętów  $A$ ,
- b) pola przekroju pręta 2.,
- c) wymiaru  $L$ ,

Należało dobrać każdy z parametrów (metodą liniowej ekstrapolacji) tak, żeby częstość ta wynosiła co najmniej 460 Hz.

Dane:  $L = 1$  m,  $A = 0.0004$  m<sup>2</sup>,  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa,  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>.



# Przykład 1.

## Wyniki

Pierwsza częstotliwość:  $f^0=455.25$  Hz

Liniowa ekstrapolacja:

$$f^1 = f^0 + \frac{df}{dx} \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{f^1 - f^0}{\frac{df}{dx}}$$

	<b>A</b>	<b>A<sub>2</sub></b>	<b>L</b>
<b>Pochodna <math>df/dx</math></b>	0 s <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup>	-1.0437e+5 s <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup>	-349 s <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup>
<b>Parametr po modyfikacji <math>x + \Delta x</math></b>	-	3.5453e-4 m <sup>2</sup>	0.9864 m
<b>Częstotliwość po modyfikacji <math>f^1</math></b>	-	459.9191 Hz	460.0258 Hz

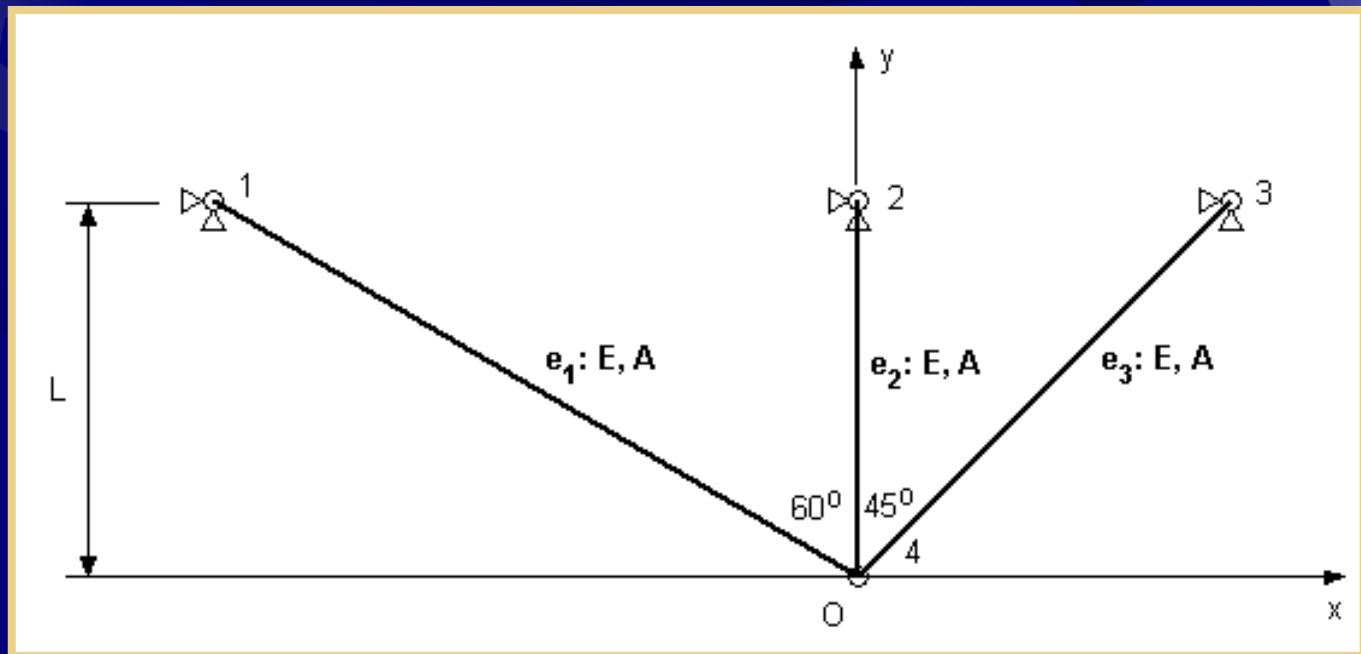
Częstość drgań kratownicy której wszystkie pręty mają jednakowe pole przekroju nie zależy od tego pola.

# Przykład 2.

## Analiza wrażliwości postaci drgań kratownicy

Obliczono pochodną wektora własnego odpowiadającego 1. postaci drgań kratownicy względem pola przekroju pręta 1. Należało dobrać parametr tak, żeby węzeł 4. poruszał się tylko w kierunku poziomym.

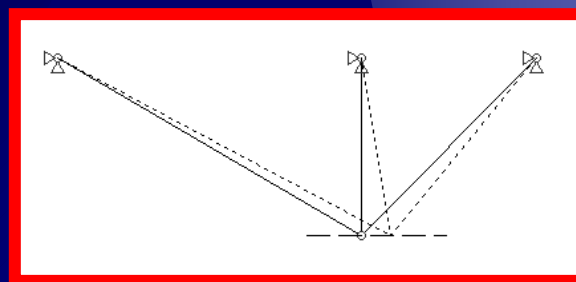
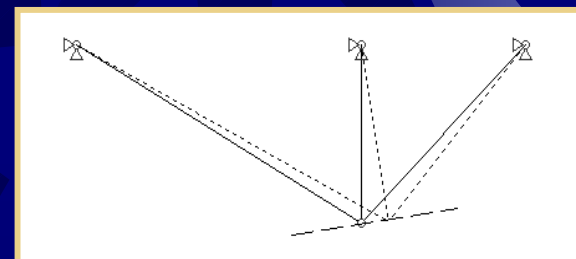
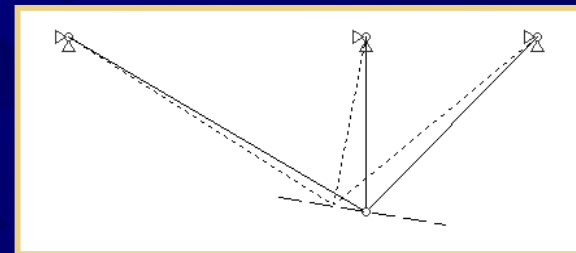
Dane:  $L = 1 \text{ m}$ ,  $A = 0.0004 \text{ m}^2$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ .



# Przykład 2.

## Wyniki

Nr	$du_2/dA_1$ [m <sup>-1</sup> ]	$A_1$ po modyfikacji [m <sup>2</sup> ]	$u_2$ po modyfikacji [m]
1	-226.1099	6.9375e-4	0.0128
2	975.9708	6.541e-4	-0.0003



# Przykład 3.

Analiza wrażliwości przemieszczeń (metoda bezpośrednia)

Obliczono pochodną pionowego przemieszczenia węzła 6. kratownicy wywołanego siłą skokową, względem wysokości  $H$ .

Dane:

$$A = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

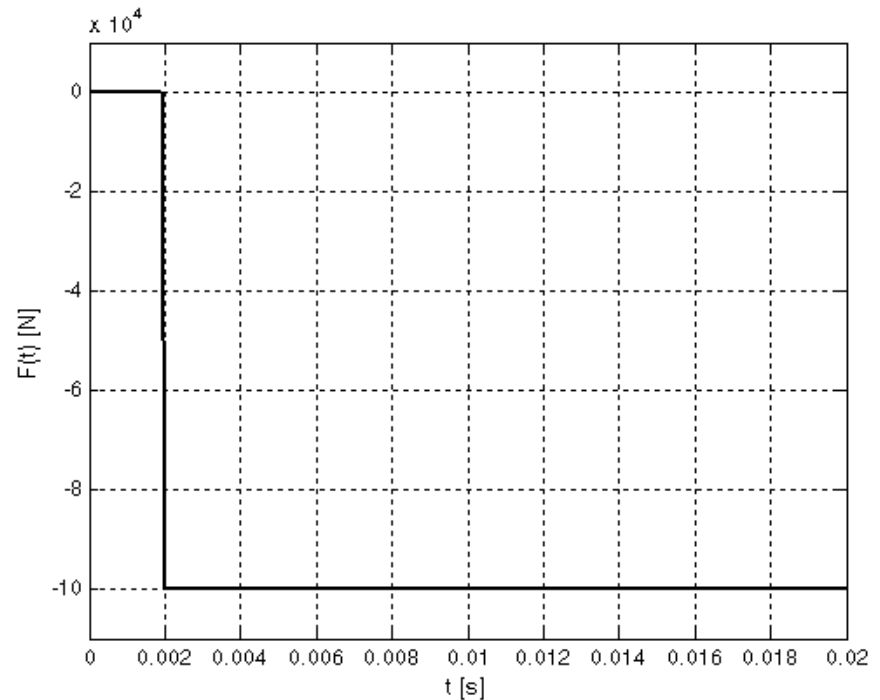
$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

krok całkowania: 0.0001 s

czas całkowania: 0.02 s

Tłumienie:  $\mathbf{C} = 0.001 \cdot \mathbf{K}$





# Przykład 3.

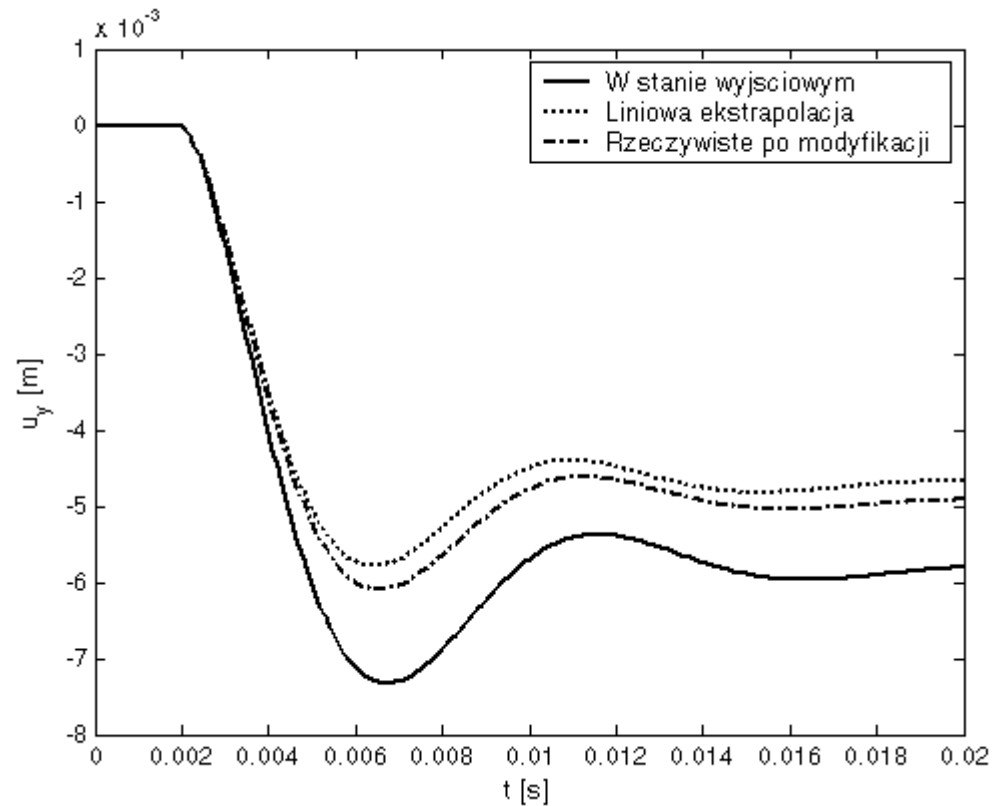
Wyniki

## Sprawdzenie

Modyfikacja:

$\Delta H = 0.15$  m.

Błąd względny  
dla największego  
przemieszczenia:  
5.3%



# Przykład 4.

Analiza wrażliwości przemieszczeń (metoda układu sprzężonego)

Obliczono pochodne funkcjonałów

$$J_1 = \int_0^{t_f} (u_y^{21})^2 dt,$$

$$J_2 = \int_0^{t_f} \left[ (u_y^{19})^2 + (u_y^{20})^2 + (u_y^{21})^2 \right] dt$$

względem promienia  $r$  otworu podpory.

Dane:

$$E=2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\nu=0.3$$

$$\rho=7860 \text{ kg/m}^3$$

PSO

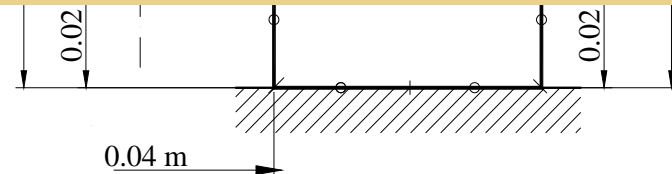
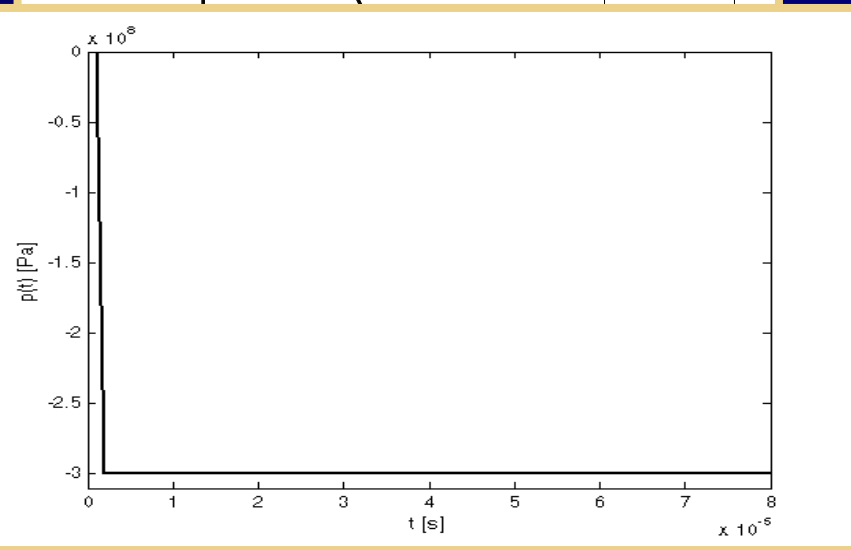
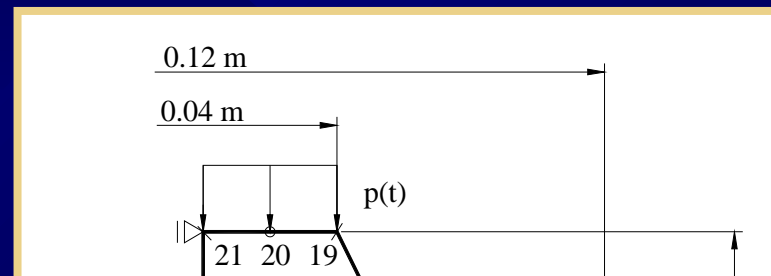
$$\text{czas całkowania: } t_f=800 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$\text{krok całkowania: } dt=40 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$r=0.01 \text{ m}$$

17 elementów, 34 węzły

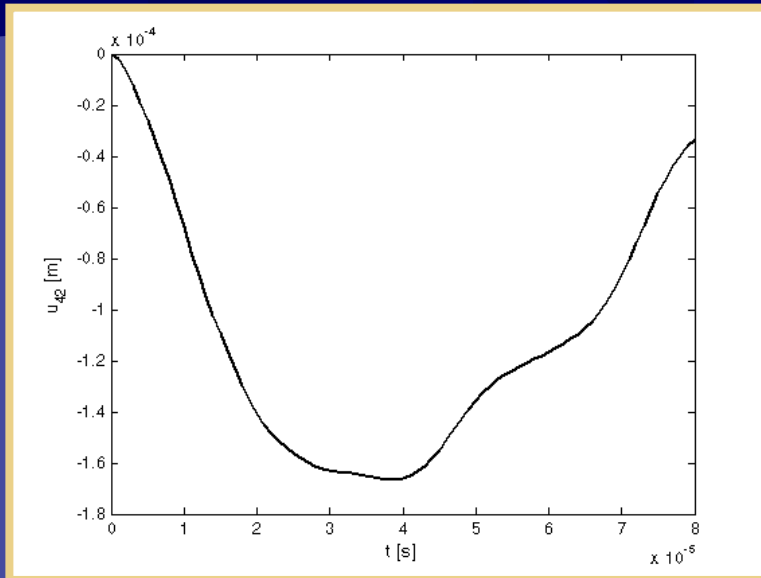
układ symetryczny (geometria, podparcie, obciążenie)



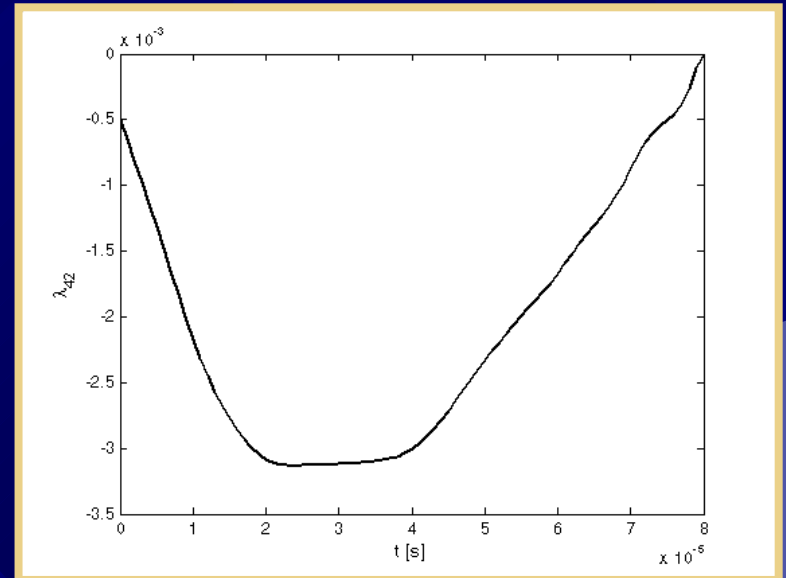
# Przykład 4.

## Wyniki

☀ Przeszyczenie y węzła 21.



☀ Wektor sprzężony



$$J_1 = \int_0^{t_f} (u_y^{21})^2 dt, \quad J_2 = \int_0^{t_f} \left[ (u_y^{19})^2 + (u_y^{20})^2 + (u_y^{21})^2 \right] dt$$

	$dJ_1/dr$ [m·s]	$dJ_2/dr$ [m·s]
Metoda układu sprzężonego	8.8386e-3	1.5305e-4
Metoda różnicowa	8.1332e-3	1.5542e-4
Błąd względny	8.7%	1.5%

# Wnioski

- ✿ Wszystkie wyniki analizy wrażliwości dotyczące kratownic są bardzo zbliżone do dokładnych.
- ✿ Przedstawione wyniki analizy wrażliwości tarcz są mniej dokładne niż wyniki analizy wrażliwości kratownic – sposób obliczania pochodnych macierzy.
- ✿ Obliczanie pochodnych macierzy metodą różnicową (tarcze) wymaga odpowiedniego doboru przyrostu parametru.
- ✿ Błędy pochodnych funkcjonałów przemieszczeń tarcz obliczanych metodą układu sprzężonego wykazywały zależność od zmienności tych przemieszczeń (błędy całkowania).
- ✿ W przypadku analizy wrażliwości tarcz pochodne funkcjonałów zależnych od przemieszczeń większej liczby węzłów wykazywały mniejsze błędy w porównaniu z pochodnymi funkcjonałów zależnych od przemieszczeń pojedynczych węzłów.

# Literatura

1. Brebbia C. A., Nardini D.: *Dynamics analysis in solid mechanics by an alternative boundary elements procedure*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 2, 1983, pp. 228-233.
2. Burczyński T.: *Metoda elementów brzegowych w mechanice*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1995.
3. Cook R. D., Malkus D. S., Plesha M. E.: *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, New York 1989.
4. Dominguez J.: *Boundary elements in dynamics*. Computational Mechanics Publications, Southampton – Boston 1993.
5. Gürdal Z., Haftka R. T.: *Elements of structural optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht – Boston – London.
6. Haug E. J.: *Design sensitivity analysis of dynamic systems*. Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems, NATO ASI Series, Vol. F27, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1987, pp. 705-755.
7. Kleiber M. (red.): *Mechanika techniczna. Tom XI. Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.