

Temat pracy:

# Numeryczne rozwiązanie równań Naviera – Stokesa

Wykonał:

Karol Kowalski

AB3

Celem pracy magisterskiej było napisanie programu do symulacji dynamiki płynów nieściśliwych w oparciu o metodę "Marker-And-Cell" opracowaną przez Eddiego Welcha i Francisa Harlowa w Los Alamos Scientific Laboratory.

Do implementacji programu wykorzystano następujące narzędzia i techniki programistyczne:

- język programowania C++ (kompilator G++), który cechuje szybkość działania, programowanie obiektowe, bogata dokumentacja
- struktury danych oraz algorytmy ze standardowej, uogólnionej biblioteki wzorców
- STL (ang. Standard Template Library) dostępnej w każdej implementacji C++;
- bibliotekę Qt do stworzenia graficznego interfejsu użytkownika;
- bibliotekę Boost – m. in. do serializacji obiektów;
- przenośność (ang. portability) kodu i bibliotek, która umożliwiła kompilację programu na systemach operacyjnych GNU/Linux oraz Microsoft Windows;

## Równanie Naviera – Stokesa dla cieczy nieściśliwej

Warunek nieściśliwości cieczy otrzymujemy z równania ciągłości przepływu, zakładając stałą gęstość cieczy. Zapisuje się go jako zerowanie się dywergencji pola wektorowego prędkości:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.4)$$

Po przekształceniu do postaci dwuwymiarowej otrzymujemy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.5)$$

Można powiedzieć, że jest to najprościej zapisany warunek zachowania masy dla cieczy nieściśliwej w postaci dwuwymiarowej. Mówi on nam, że przyrost wektora prędkości w kierunku  $x$  musi być równy co do wartości bezwzględnej i mieć przeciwny znak niż przyrost w kierunku  $y$ . W przeciwnym razie masa w układzie nie zostanie zachowana i nie będziemy już mieli do czynienia z cieczą nieściśliwą.

Wykorzystamy teraz wspomniany wcześniej tensor naprężeń płynu niutonowskiego do wyprowadzenia równania Naviera – Stokesa. Biorąc pod uwagę warunek na nieściśliwość, tensor (2.3) możemy zapisać w uproszczonej postaci:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (2.6)$$

Aby wyprowadzić równania różniczkowe przepływu takiej cieczy, musimy obliczyć dywergencję tensora naprężeń, co po przekształceniach zapisujemy:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.7)$$

Dywergencja tensora naprężeń w dowolnym punkcie obszaru płynnego jest równa wektorowi siły powierzchniowej w tym punkcie. Po podstawieniu otrzymujemy ostatecznie **równanie Naviera – Stokesa** w postaci wektorowej:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.8)$$

Jest to równanie różniczkowe przepływu cieczy niutonowskiej.

## Analiza równań Naviera – Stokesa

Równanie Naviera – Stokesa opisuje lokalną zmianę pędu – równanie to ma podobną interpretację fizyczną co druga zasada dynamiki Newtona, zapisana jako pochodna pędu po czasie. Poszczególne człony równania opisują:

$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  - konwekcję – przenoszenie lokalnego pędu wraz z ruchem cieczy,

$\frac{1}{\rho} \nabla p$  - zmianę pędu powstającą od sił ciśnieniowych,

$\nu \nabla^2 \mathbf{v}$  - siły tarcia – dysypacja pędu pod wpływem procesów tarcia,

$\mathbf{F}$  - powstawanie pędu pod wpływem sił masowych (grawitacja).

## Warunki brzegowo – początkowe

Każdy rozwiązywany problem wymaga nałożenia odpowiednich warunków brzegowo – początkowych. W mojej pracy będą one szczególnie dotyczyć stałej konfiguracji ścianek sztywnych, które mogą być dwojakiego typu – z poślizgiem i bez poślizgu, a także brzegu z wpływem i wypływem. Ścianki sztywne mogą częściowo ograniczać płyn, lub mogą definiować przeszkodę, obok której następuje przepływ.

Warunki brzegowe są następujące:

- prędkość prostopadła do ścianki zawsze jest równa zero,
- ścianka z poślizgiem definiuje gładką powierzchnię – prędkość styczna na ścianie jest równa prędkości płynu przy brzegu,
- ścianka bez poślizgu definiuje “szorstką” powierzchnię – prędkość styczna do ścianki musi zaniknąć,
- ścianki sztywne z wpływem oznaczają wpływ cieczy z arbitralnie nałożoną prędkością,
- wypływ następuje w taki sposób, aby wywoływać minimalne zaburzenia cieczy pozostającej w systemie.

Oprócz niezmiennych w czasie symulacji warunków brzegowych, istnieją także warunki brzegowe nakładane na powierzchni swobodnej, która stale zmienia swoje położenie w czasie symulacji. Do wyznaczenia powierzchni swobodnej zostaną użyte cząstki znaczone, natomiast poszczególne warunki przyjmują postać:

- naprężenie styczne do powierzchni musi zaniknąć,
- naprężenie normalne do powierzchni musi równoważyć jakiejkolwiek zewnętrznie przyłożone naprężenie normalne.

## Model numeryczny – technika rozwiązania

Numeryczne rozwiązanie równań dynamiki płynów należy rozpocząć od wybrania odpowiedniej metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Do najbardziej znanych należą: metoda różnic skończonych, metoda elementów skończonych, czy zdobywająca coraz większą popularność metoda elementów brzegowych. W mojej pracy wykorzystam metodę różnic skończonych, ze względu na jej prostą interpretację fizyczną, a także możliwość łatwej implementacji w postaci programu komputerowego.

Cechą wspólną wszystkich metod jest *dyskretyzacja*, która w przypadku MRS dotyczy wprost rozwiązywanych równań, co w efekcie prowadzi do zastąpienia równań różniczkowych przez równania różnicowe. Ostatecznie otrzymuje się układ (lub układy) równań algebraicznych, których rozwiązanie dostarcza wartości poszukiwanej (lub poszukiwanych) funkcji w dyskretnym zbiorze punktów zwanych *węzłami*.

W pracy zastosowano klasyczną metodę różnic skończonych, wymagającą przyjęcia regularnej siatki złożonej z prostokątnych komórek elementarnych. Takie podejście jest efektywne i łatwe dla obszarów zbudowanych z prostej, prostokątnej geometrii. Dla zadań z geometrią krzywoliniową można zastosować jedną ze stale rozwijanych i udoskonalanych odmian MRS (m. in. przez J. Orkisz [5]). Pierwszą z tych metod jest tzw. krzywoliniowa metoda różnic skończonych (ang. Curvilinear Finite Difference), dopuszczająca krzywoliniowe, jednorodnie siatki. Jeszcze bardziej ogólne są tak zwane metody bezsiatkowe (ang. meshless), oparte na dowolnym zbiorze węzłów nie tworzących wspólnie żadnej struktury (siatki).

## Reprezentacja cieczy

Próba rozwiązania komputerowego problemów z zakresu dynamiki płynów wymaga rozważenia następujących założeń dotyczących przybliżonej reprezentacji modelu płynu:

- jak płyn i otaczające go środowisko mają być opisywane?
- jak zmiany konfiguracji cieczy w czasie mają być obliczane?

Zastosowany model, opisany szczegółowo w pracy [8], umożliwia śledzenie konfiguracji cieczy w całej objętości, co pozwala przebadać szeroki krąg zjawisk fizycznych. Do wyznaczania komórek powierzchniowych służą bezmasowe cząstki znaczone, które poruszają się z prędkościami będącymi średnią ważoną z najbliższych prędkości na siatce różnicowej.

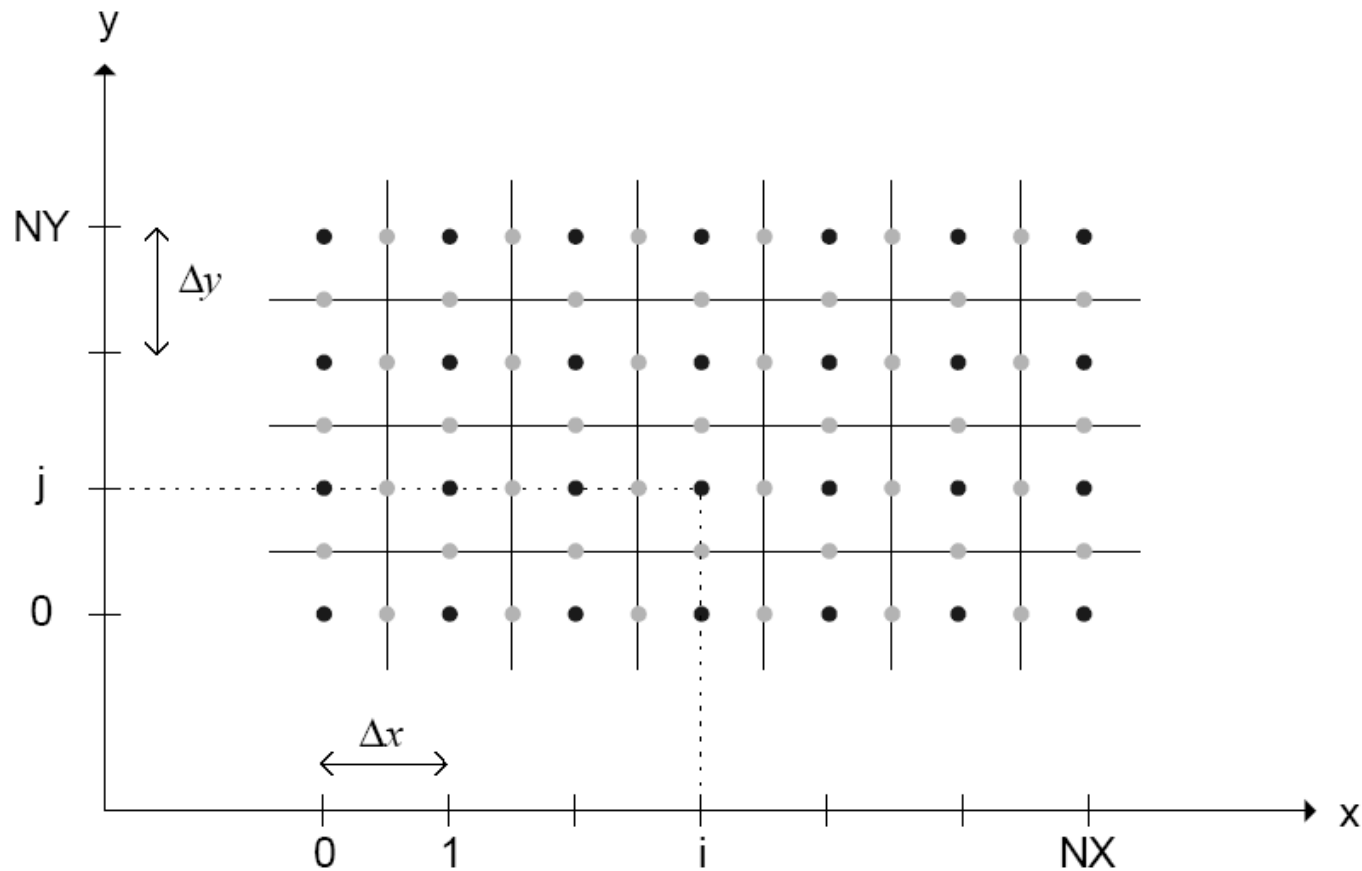
Istnieją dwa niezależne układy współrzędnych:

- podstawowy, obejmujący cały model fizyczny jednorodną prostokątną siatką różnicową komórek, każda o wymiarze  $\Delta x$  na  $\Delta y$ . Komórki są numerowane dwoma indeksami  $i, j$ , gdzie  $i$  oznacza miejsce komórki na poziomej osi  $x$ , a  $j$  miejsce komórki na pionowej osi  $y$ ,
- dodatkowy, będący przestrzenią dla poruszających się w wektorowym polu prędkości cząstek, których ruch opisuje trajektorie odpowiednich elementów cieczy.



## Siatka różnicowa Eulera

Chcąc zdefiniować model fizyczny, należy podzielić obszar za pomocą siatki różnicowej. Na rysunku narysowano fragment siatki różnicowej, na której rozpięte zostanie rozwiązanie równań NS. Punkty oznaczone kolorem czarnym oddalone są od siebie o odległość  $\Delta x$  w kierunku  $x$  oraz  $\Delta y$  w kierunku  $y$ . Na tak utworzonej siatce znajdują się informacje o kompletnej konfiguracji cieczy.



Rys 3.1 Siatka różnicowa Eulera

## Równanie Naviera – Stokesa w zapisie różnicowym

Zapiszmy teraz równanie NS w formie różniczkowej. Sprowadza się to do znajomości znaczenia i zasad działania operatora nabla, który jest operatorem różniczkowania przestrzennego, tzn.

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.2)$$

Operator ten, po usunięciu członu działającego na współrzędną  $z$ , pozwala zapisać równanie NS w formie różniczkowej, dla dwóch składowych prędkości oddzielnie:

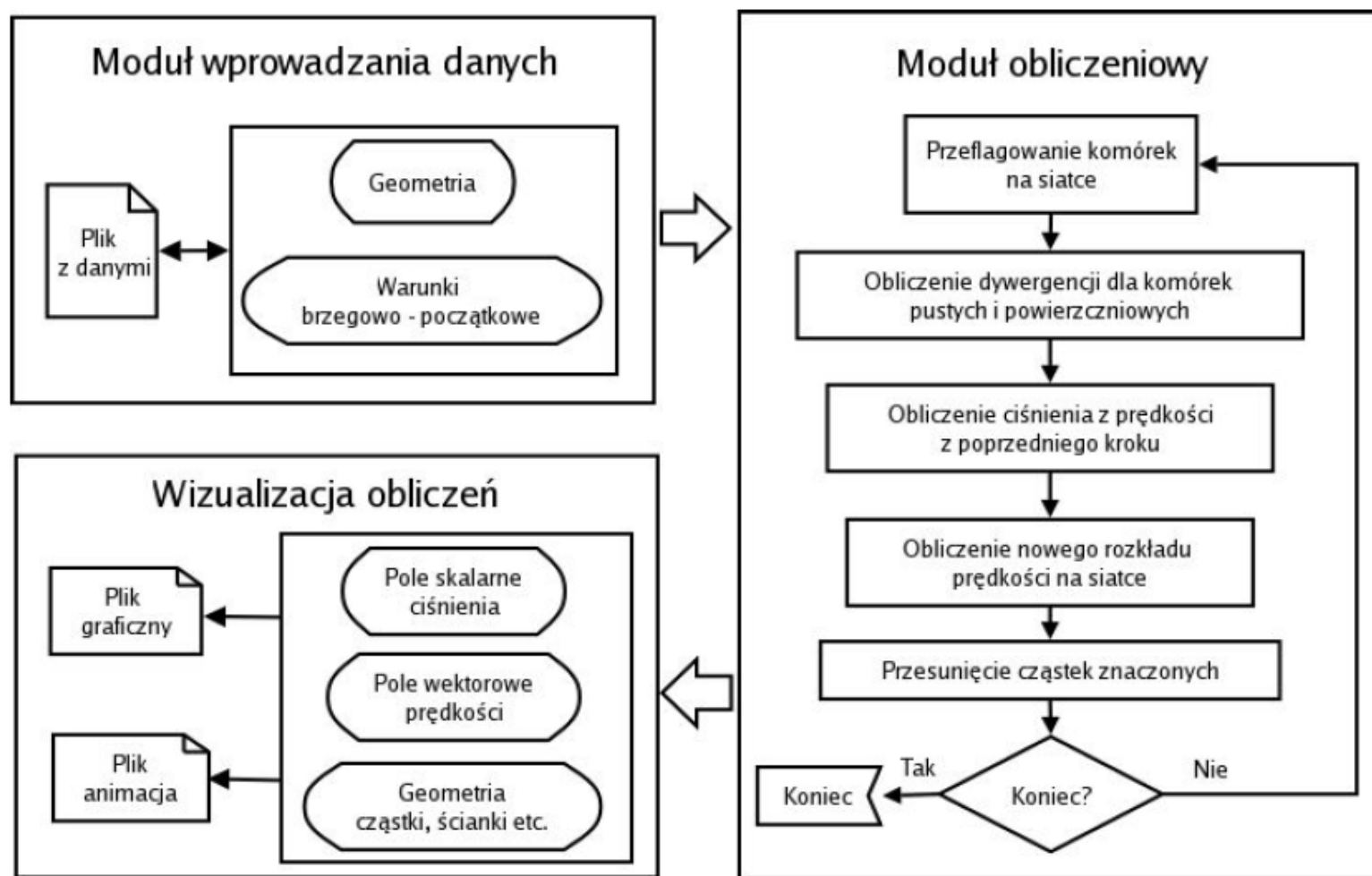
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial v^2}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.4)$$

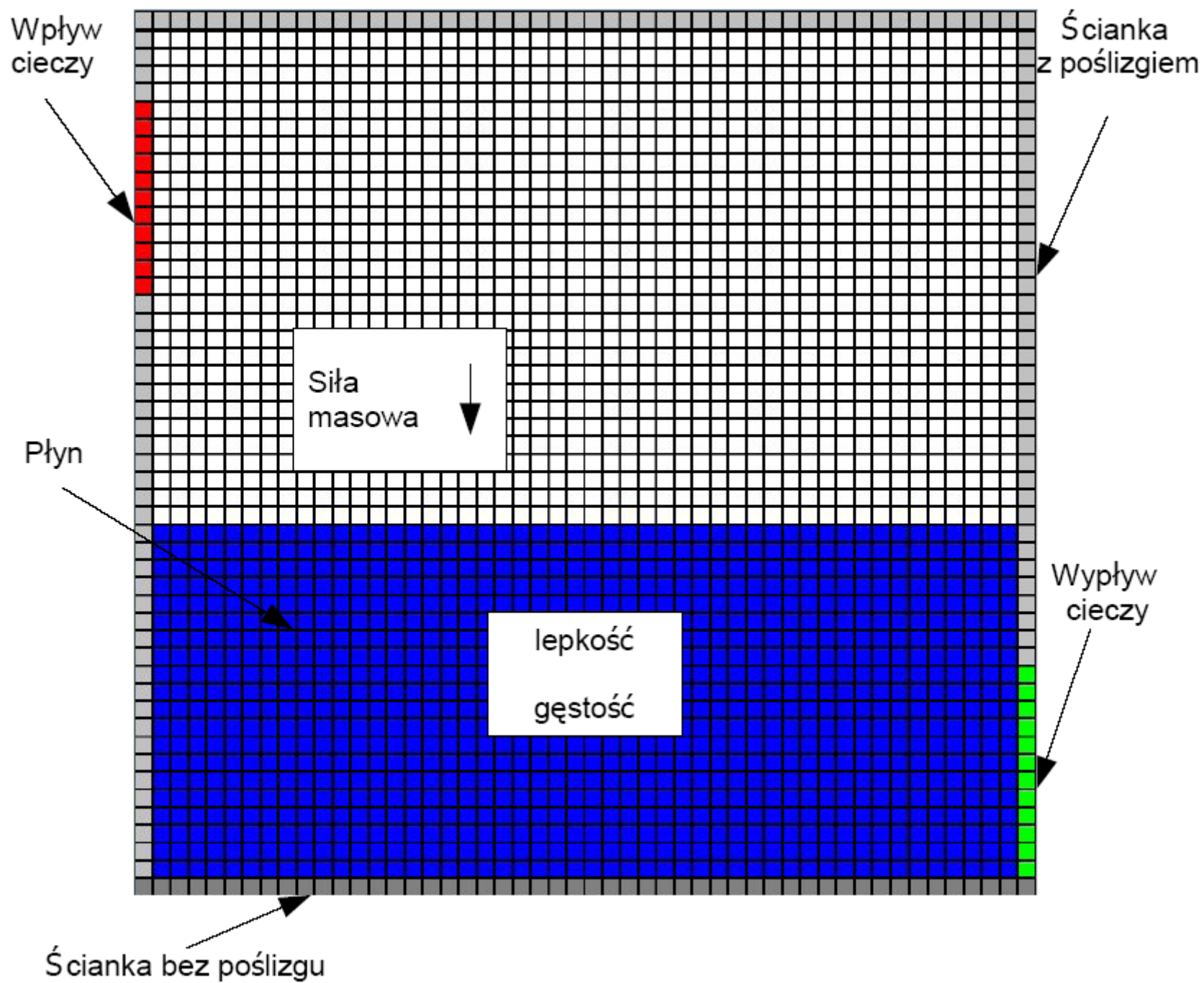
Taka postać równia NS – podzielona na oddzielne równania dla składowych przestrzennych – umożliwia przejście do rachunku różnic skończonych. Warto zwrócić uwagę, że z dwóch równań (3.3) i (3.4) w zasadzie musimy zająć się konstrukcją rozwiązania jednego z nich, drugie ma analogiczną budowę i są to równania wzajemnie symetryczne.

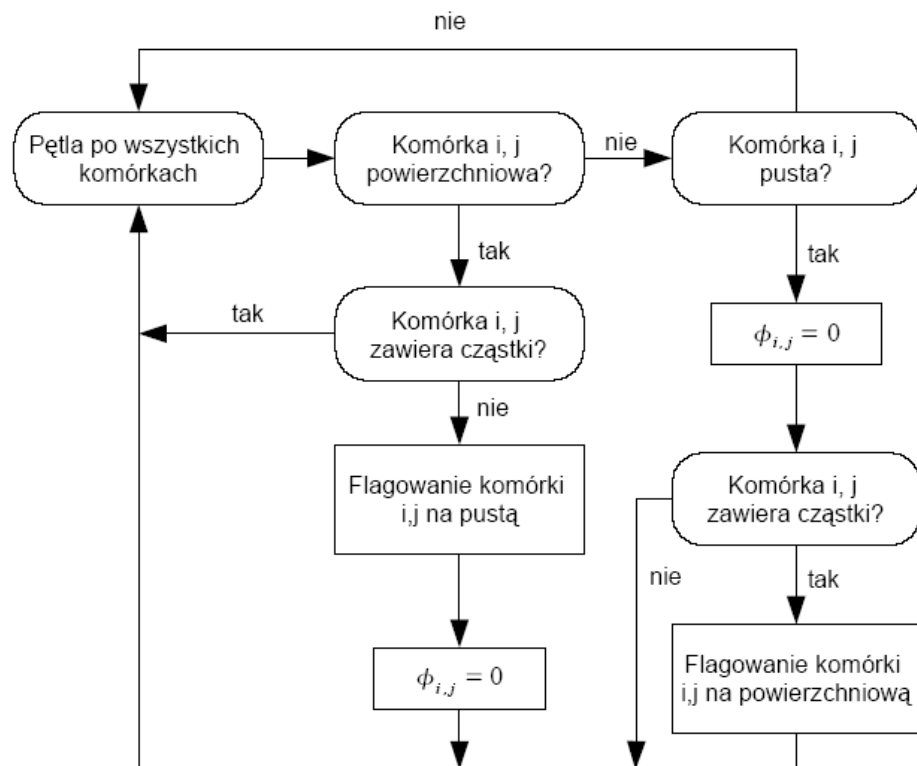
## Ogólny schemat działania programu

Schemat działania programu został wyprowadzony metodą od ogółu do szczegółu. Na rysunku 4.1 przedstawiono budowę programu, który złożony jest z trzech odrębnych modułów. Takie rozbitcie programu jest powszechnie stosowane w programach do obliczeń inżynierskich typu CAE (ang. computer aided engineering).

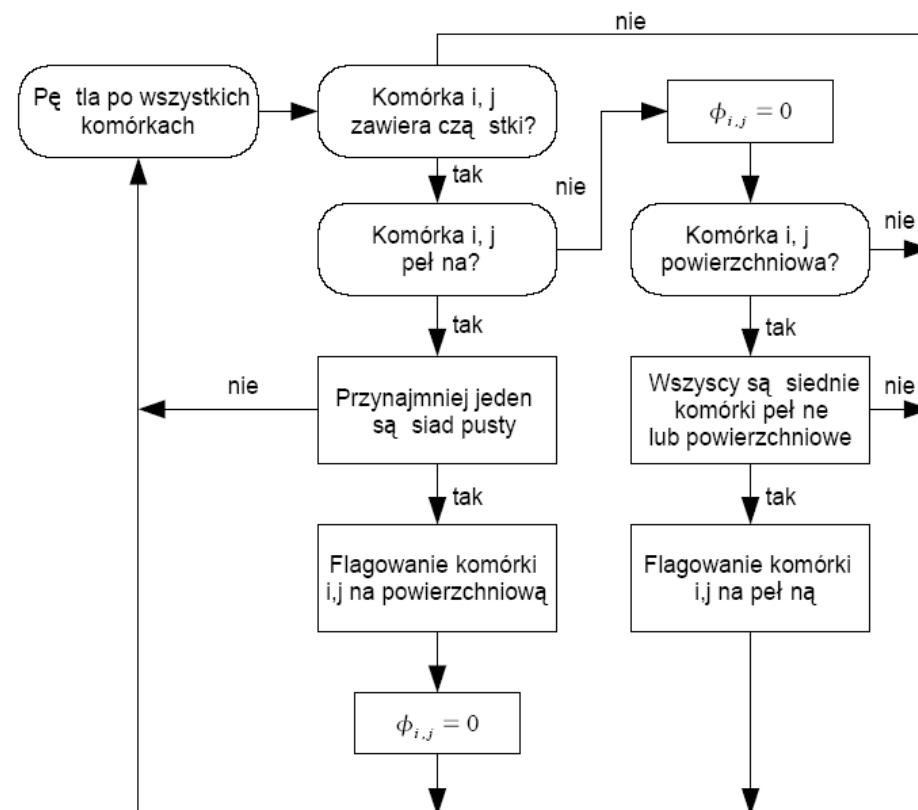


Rys 4.1 Schemat działania programu

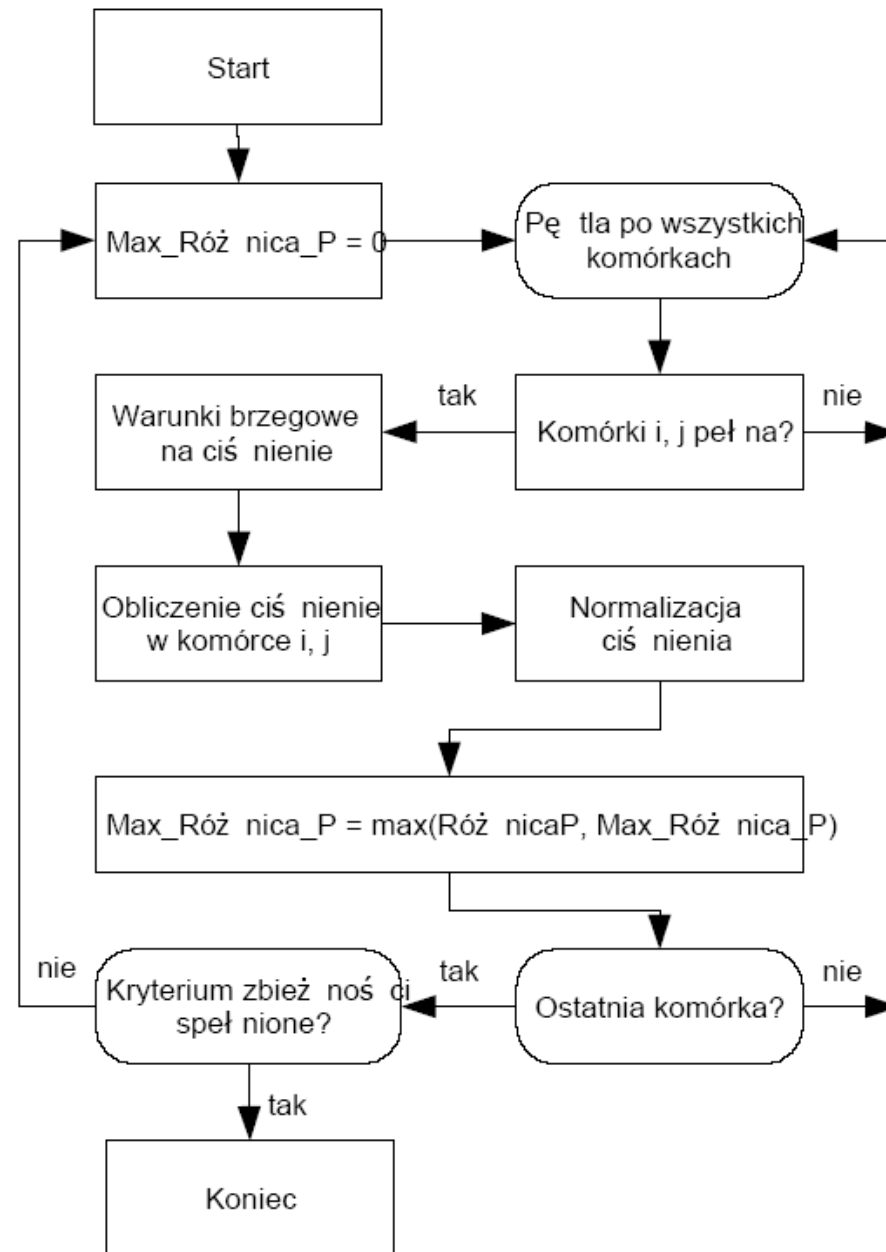




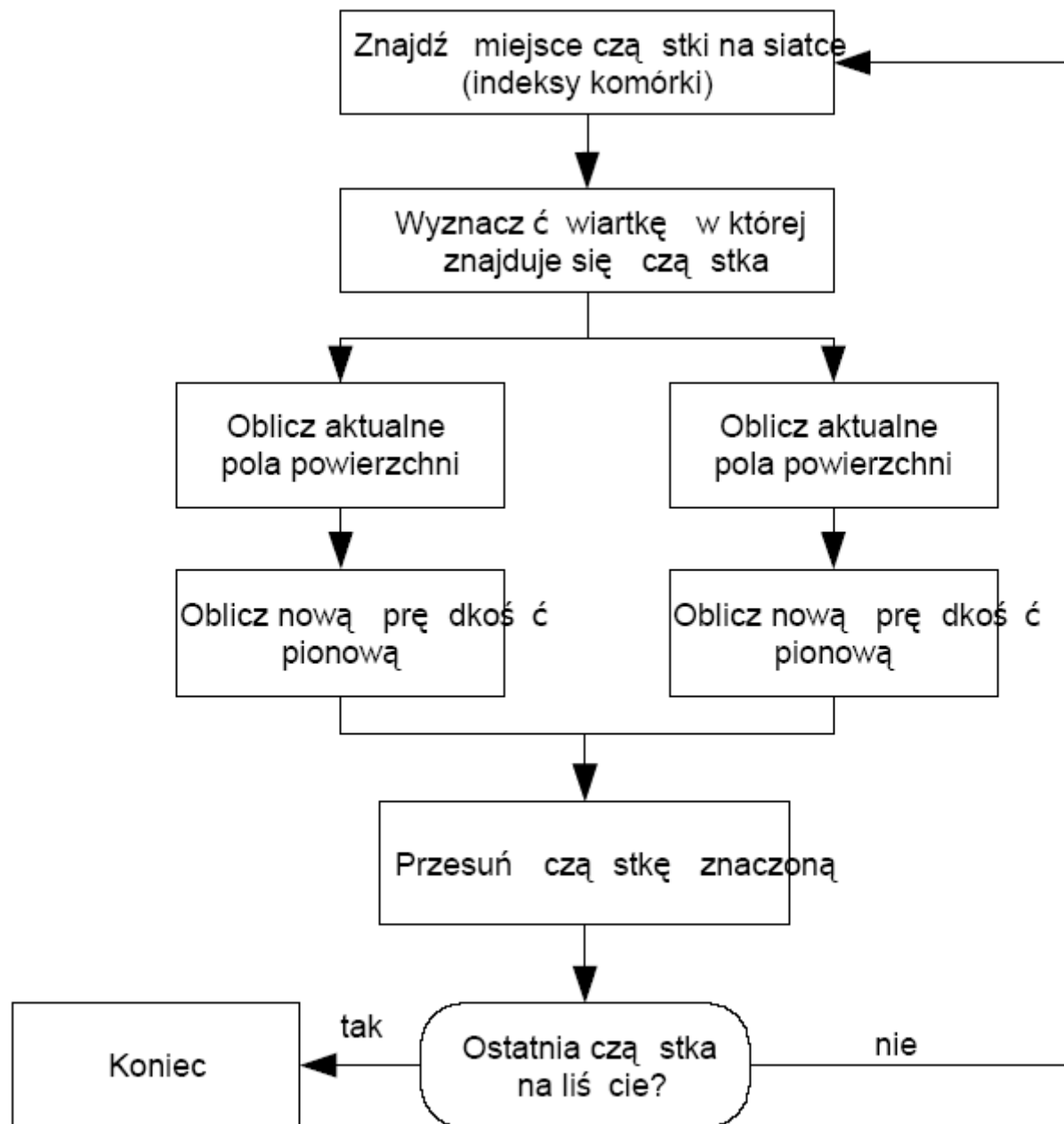
Rys 4.3 Przeflagowanie dla komórek pustych i powierzchniowych



Rys 4.4 Przeflagowanie dla komórek powierzchniowych i pełnych



Rys 4.6 Procedura iteracyjna wyznaczania pola ciśnień



Rys 3.12 Algorytm przesuwania cząstek znaczonych

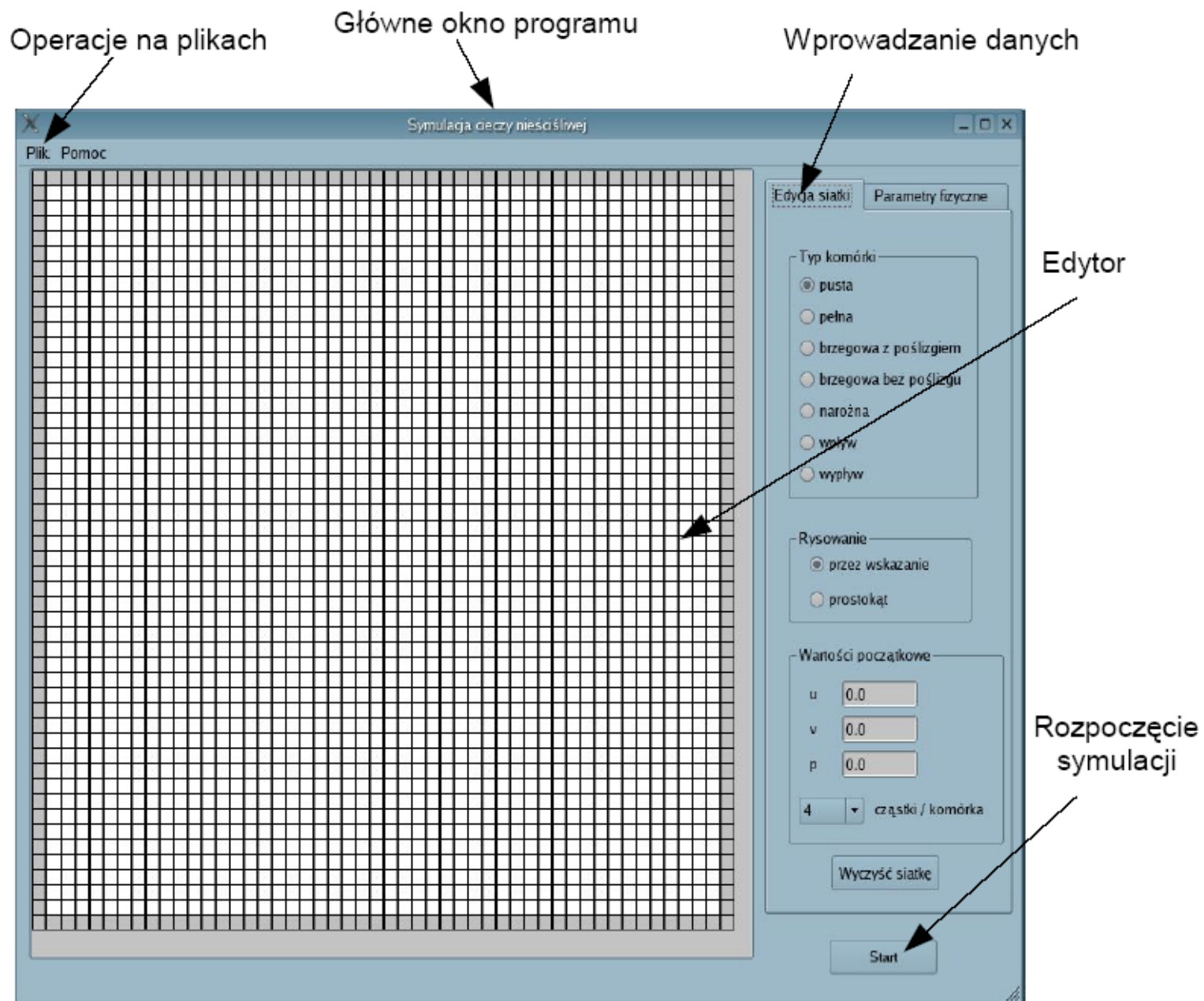
W tabeli 5.1 zestawiono porównanie wyników numerycznych uzyskanych w programie FluSim z wynikami analitycznymi wyliczonymi ze wzoru 4.2.

*Tabela 5.1 Porównanie wyników analitycznych i numerycznych dla rozkładu ciśnienia hydrostatycznego w zbiorniku*

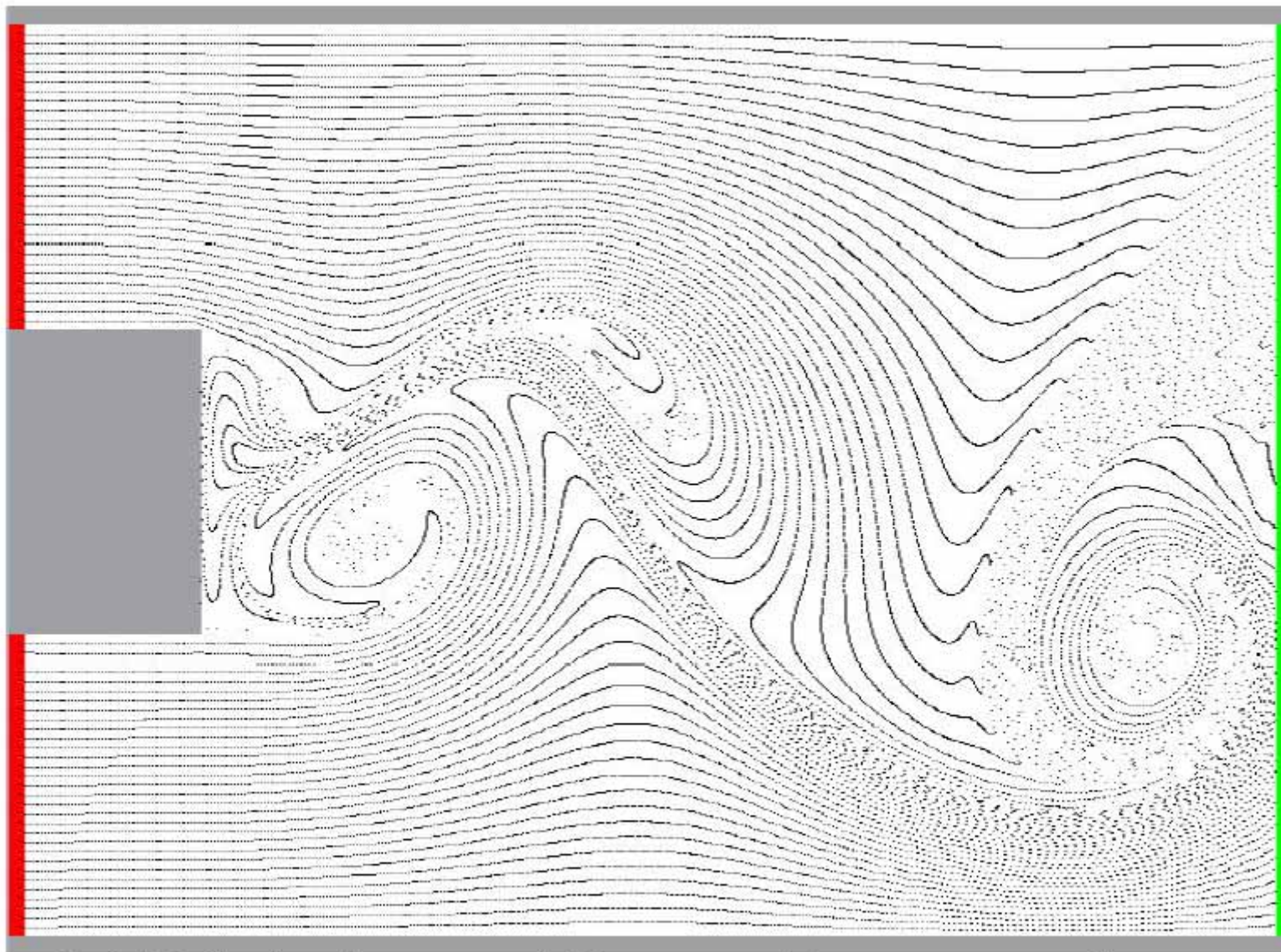
| <b>z</b> | <b>p - analityczne</b> | <b>p – program (1 s)</b> | <b>p – program (2 s)</b> | <b>p – program (3 s)</b> |
|----------|------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0.5      | 5000                   | 4868                     | 4997                     | 4999                     |
| 2.5      | 25000                  | 24343                    | 24986                    | 24999                    |
| 5        | 50000                  | 48710                    | 49973                    | 49999                    |
| 7.5      | 75000                  | 73125                    | 74961                    | 74999                    |
| 10       | 100000                 | 97610                    | 99951                    | 99999                    |
| 13       | 130000                 | 127115                   | 129940                   | 129998                   |
| 15       | 150000                 | 146872                   | 149935                   | 149998                   |
| 17.5     | 170000                 | 171677                   | 174931                   | 174998                   |
| 20       | 200000                 | 196618                   | 199930                   | 199998                   |

Porównanie wyników analitycznych z numerycznymi potwierdza poprawność zastosowanego modelu numerycznego. Na rysunku 3.13 przedstawiono graficznie rozkład ciśnienia hydrostatycznego w analizowanym zbiorniku.

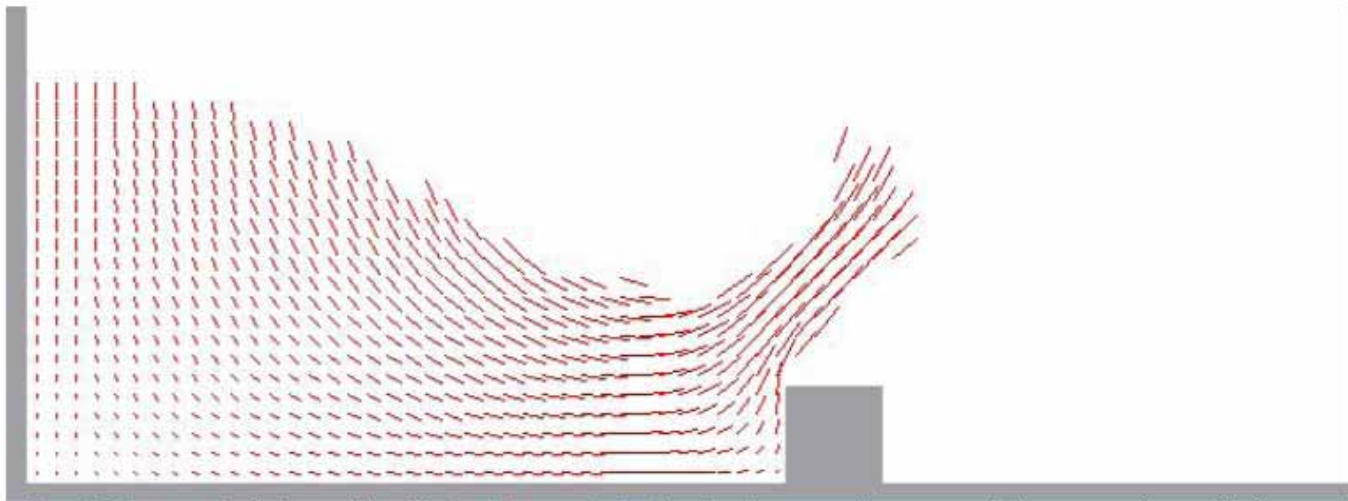




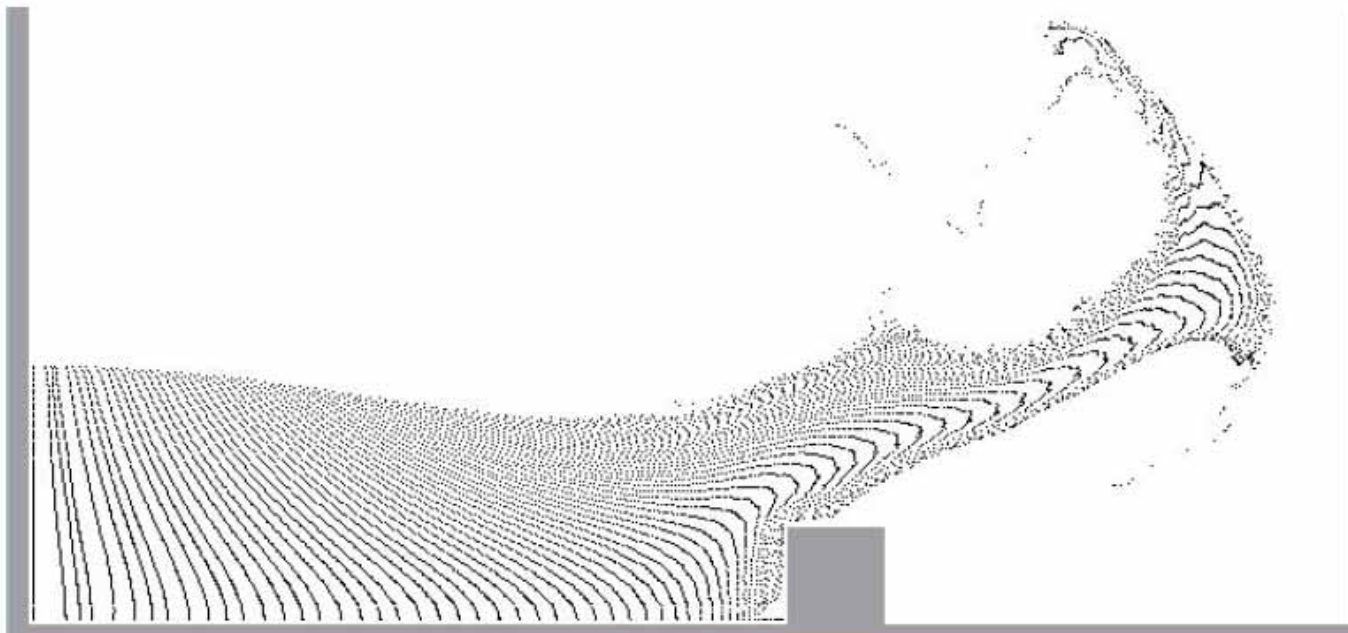
Rys 5.1 Główne okno programu FluSim



*Rys 6.1 Ścieżka wirowa Karmana - smugi widoczne na rysunku tworzone są przez cząstki znaczone.*



Rys 6.9 Łamanie ściany zbiornika  $t = 5s$  – potwierdzenie obserwacji z poprzedniego rysunku; widać wzrost prędkości na czole strugi



Rys 6.10 Łamanie ściany zbiornika  $t = 8s$  – widać spłaszczenie czoła strugi, efekt lepkości i oporów ruchu na styku ciecz - atmosfera

## Wnioski.

W pracy przedstawiono model numeryczny do symulacji przepływu cieczy lepkich, nieściśliwych. Przedstawiony algorytm (program komputerowy) umożliwia przeprowadzanie symulacji dla ciężkich cieczy (ang. low-speed flows) z ruchomą powierzchnią swobodną, a także przepływów ograniczonych.

Program umożliwia przebadanie szerokiego kręgu zjawisk fizycznych zachodzących w cieczach, jak załamywanie się fal, rozbryzgi czy tworzenie się wirów. Algorytm oparto na pełnych równaniach Naviera - Stokesa, z uwzględnieniem wszystkich nieliniowych członów, oraz metodzie korekcji ciśnień. Jest to niewątpliwie bardziej skomplikowane podejście niż alternatywny model z wykorzystaniem funkcji prądu, jednak w zamian łatwiejsze staje się nakładanie złożonych warunków brzegowych (powierzchnia swobodna jest przykładem zagadnienia z ruchomym brzegiem).

Zaprezentowany model jest uniwersalny, można go rozwinąć na trzeci wymiar przestrzenny, a także poszerzyć o zagadnienie przepływu ciepła [8], czy uwzględnić dynamikę brył sztywnych [2].

Program można wykorzystać w obliczeniach inżynierskich, jednak jego zastosowanie jest ograniczone przez dość słabe możliwości tworzenia geometrii (siatka musi składać się z elementów prostokątnych). Jest to najpoważniejsze ograniczenie klasycznej metody różnic skończonych, które praktycznie dyskwalifikuje jej zastosowanie w bardziej złożonych modelach, wymagających aproksymacji brzegu krzywymi wyższych rzędów. W takich zagadnieniach rozwiązaniem może być intensywnie rozwijana uogólniona metoda różnic skończonych, oparta na dowolnie rozmieszczonych węzłach nie tworzących żadnej sztywnej struktury (siatki).

Oprócz czysto naukowych (inżynierskich) zastosowań, przedstawiony model może być z powodzeniem używany w animacji komputerowej. Na realizm animacji wpływa przede wszystkim odpowiedni ruch obiektów w tworzonych scenach. Powszechnie stosowane metody, jak ustawianie klatek kluczowych, technologia morfingu obiektów czy inne pośrednie metody kreowania ruchu dają zwykle pseudorealistyczne efekty i są trudne w stosowaniu. Obecnie coraz częściej w filmach animowanych czy grach komputerowych wykorzystuje się fizyczne metody symulacji, które dają uniwersalne i elastyczne procedury do realistycznej animacji.